

חدوا 2

פרק 18 - טורי טיילור - מקלורן

תוכן העניינים

- 1 טור טיילור וטור מקלורן
2. נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות
- 3

טור טיילור וטור מקלרון

שאלות

בשאלות 1-24 מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x = 0$ (טור מקלרון) :

$$f(x) = \sinh x \quad (3)$$

$$f(x) = x^2 e^{-4x} \quad (2)$$

$$f(x) = \sin 2x \quad (1)$$

$$f(x) = 2^x \quad (6)$$

$$f(x) = \cos^2 x \quad (5)$$

$$f(x) = \sin^2 x \quad (4)$$

$$f(x) = \arcsin x \quad (9)$$

$$f(x) = \ln(2 - 3x + x^2) \quad (8)$$

$$f(x) = x \cos(4x^2) \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (12)$$

$$f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (11)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (15)$$

$$f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (14)$$

$$f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (18)$$

$$f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (17)$$

$$f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (16)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (21)$$

$$f(x) = \ln(1-x) \quad (20)$$

$$f(x) = \ln(1+x) \quad (19)$$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{3}\right) \quad (24)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (23)$$

$$f(x) = \ln(5-x) \quad (22)$$

הערות : לפתרון שאלות 15 ו-16, יש להזכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.

לפתרון סעיפים 18, 19, 23 ו-24 יש להזכיר את הנושא גזירה וaintגרציה של טורי מקלרון.

אפשר להיעזר בפתרונות הידועים לטור מקלרון המופיעים بنفسך.

בשאלות 25-27 מצאו את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס, בפיתוח לטור מקלרון של הפונקציות (נדרש ידוע ככפל וחילוק של פולינומים) :

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x} \quad (27)$$

$$f(x) = \tan x \quad (26)$$

$$f(x) = e^{-x^2} \cos x \quad (25)$$

תשובות סופיות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (3) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n x^{n+2}}{n!} \quad (2) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (1) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n x^n}{n!} \quad (6) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (5) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (4) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$(-1 \leq x < 1) \quad \ln 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (8) \quad (-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n} x^{4n+1}}{(2n)!} \quad (7)$$

$$(|x| < 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (10)$$

$$x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (9) \quad (-1 < x < 1)$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n} \quad (12)$$

$$(|x| < 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n} \quad (11)$$

$$(|x| < \frac{1}{4}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1} \quad (14)$$

$$(|x| < 5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n \quad (13)$$

$$(|x| < 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1 \right) x^n \quad (16)$$

$$(|x| < 3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}} \quad (15)$$

$$(|x| < 1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (18)$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n \quad (17)$$

$$(-1 \leq x < 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (20)$$

$$(-1 < x \leq 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (19)$$

$$(-5 \leq x < 5) \quad \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} \quad (22)$$

$$(|x| < 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (21)$$

$$(|x| \leq 3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)} \quad (24)$$

$$(|x| < \frac{1}{2}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad (23)$$

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \quad (26)$$

$$1 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{25}{24} x^4 - \frac{331}{720} x^6 + \dots \quad (25)$$

$$x - x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{30} x^5 + \dots \quad (27)$$

נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

טור מקלורן

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

תחום התכנסות

$$-\infty < x < \infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$-1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$$

$$-1 < x < 1$$

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n$$

$$= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$$

$$-1 \leq x \leq 1 \ (m > 0)$$

$$-1 < x \leq 1 \ (-1 < m < 0)$$

$$-1 < x < 1 \ (m \leq -1)$$

$$m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$$